Klasse 11/12, Physik, 15.2.2021-19.2.2021

I Den unten stehenden Text ins Heft übertragen, den Vorgang sich einprägen und mit Seite 263 vergleichen!

II Die Aufgabe 10 von Buchseite 280 bearbeiten!

Dreidimensionaler Potentialtopf
Teilchen sind selten in langen geraden Tunneln, wo sie sich praktisch nur in einer Dimension bewegen, eingesperrt. Der Raum, in dem sich ein Teilchen befindet, ist also üblicherweise so in drei Dimensionen begrenzt, dass sich das Teilchen nicht haupsächlich in nur einer Dimension bewegt. Man spricht dann von einem dreidimensionalen Potentialtopf. Wir müssen also das Quantenobjekt durch eine dreidimensionale Welle beschreiben, welche bei Reflexion in jeder der drei Dimensionen kontruktive Interferenz mit sich selbst erzeugt. Aus Klasse 10 weiß man, dass die Kraft, das Drehmoment und die Geschwindigkeit gerichteten Größen sind und durch Pfeile im dreidimensionalen Raum dargestellt werden können. Da der Impuls durch $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ definiert ist, ist auch dieser eine gerichtete Größe. Die Länge so eines Pfeils lässt sich wie die Länge der Diagonale eines Schuhkartons berechnen:

Länge der Diagonalen $= \sqrt{\text{Länge}^2 + \text{Breite}^2 + \text{Höhe}^2}$,

wobei Länge, Breite und Höhe jeweils als Ausdehnung in x-Richtung, in y-Richtung und in z-Richtung betrachtet werden kann. So berechnet man denn auch den Betrag von $\vec{p}$:

$$\left|\vec{p}\right| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \quad \text{bzw.} \quad \left|\vec{p}\right|^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

Ist ein Teilchen nun eingesperrt in einen Raum mit Länge a_x, Breite a_y und Höhe a_z, so gilt:

$$\lambda_x = \tfrac{h}{p_x} = \tfrac{2 \cdot a_x}{n_x} \Longrightarrow p_x = n_x \cdot \tfrac{h}{2 \cdot a_x}$$

$$\lambda_y = \tfrac{h}{p_y} = \tfrac{2 \cdot a_y}{n_y} \Longrightarrow p_y = n_y \cdot \tfrac{h}{2 \cdot a_y}$$

$$\lambda_z = \tfrac{h}{p_z} = \tfrac{2 \cdot a_z}{n_z} \Longrightarrow p_z = n_z \cdot \tfrac{h}{2 \cdot a_z}$$

Wie im eindimensionalen Fall, setzen wir in die Formel für die kinetische Energie ein:

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left|\vec{v}\right|^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{\left|\vec{p}\right|}{m}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{\left|\vec{p}\right|^2}{m^2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{(n_x \cdot \frac{h}{2 \cdot a_x})^2 + (n_y \cdot \frac{h}{2 \cdot a_y})^2 + (n_z \cdot \frac{h}{2 \cdot a_z})^2}{m^2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{(\frac{h}{2})^2 \cdot \left((\frac{n_x}{a_x})^2 + (\frac{n_y}{a_y})^2 + (\frac{n_z}{a_z})^2\right)}{m^2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{h^2}{2^2} \cdot \frac{1}{m^2} \cdot \left(\left(\frac{n_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{a_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{a_z}\right)^2\right) \\
&= \frac{h^2}{8 \cdot m} \cdot \left(\left(\frac{n_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{a_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{a_z}\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

Um entsprechend die Abhängigkeit von n_x, n_y und n_z zu zeigen, schreibt man:

$$
E_{n_x,n_y,n_z} = \frac{h^2}{8 \cdot m} \cdot \left(\left(\frac{n_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{a_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{a_z}\right)^2\right) \qquad (n_x \epsilon \mathbb{N}, \quad n_y \epsilon \mathbb{N}, \quad n_z \epsilon \mathbb{N})
$$